

TD 2 : Calcul algébrique dans $\mathbb{R}$ Indications

(In)équations dans $\mathbb{R}$

1 ★ Montrer que pour tout $x > 0$, on a $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

On peut réécrire cela comme une simple équation impliquant un polynôme du second degré.

2 ★★ Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- | | |
|----------------------------------|--------------------------|
| 1) $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$ | 4) $ x^2 - x = x + 1$ |
| 2) $\sqrt{x} + \sqrt{2x+1} = 5$ | 5) $x^3 - 2x - 1 = 0$ |
| 3) $ 2x-5 = x^2-4 $ | 6) $x^4 + 4x^2 - 21 = 0$ |

Pour les racines carrées, il faut passer au carré pour les éliminer. Pour les valeurs absolues, il faut discuter du signe des expressions à l'intérieur pour les enlever.

3 ★★ Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| 1) $ x+1 \leq x-2 $ | 4) $ x+1 + x-3 \leq 6$ |
| 2) $2x+1 < \sqrt{x^2+8}$ | 5) $x + \sqrt{x^2-5x+4} < 2$ |
| 3) $x-2 \geq \sqrt{3x+4}$ | 6) $\sqrt{ x+2 } \leq x-10 $ |

Pour les racines carrées, il faut passer au carré pour les éliminer. Pour les valeurs absolues, il faut discuter du signe des expressions à l'intérieur pour les enlever.

4 ★★ Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- | | |
|---|--|
| 1) $\frac{x+1}{x-1} > 1$ | 3) $\frac{x+5}{x^2-1} \geq 1$ |
| 2) $\frac{x}{x+1} \leq \frac{x+2}{x+3}$ | 4) $\left \frac{1}{x} - 2 \right \leq 3$ |

5 ★★ On cherche à résoudre en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ les (in)équations suivantes, dont l'inconnue est un réel x :

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = a$$

- 1) On suppose $a < 0$. Quelles sont les solutions dans ce cas ?
- 2) Même question si $a \in [0, 1[$.
- 3) On suppose désormais $a \geq 1$. Résoudre l'équation en exprimant les solutions pour x en fonction de a .

1) Peut-on avoir $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} < 0$?

2) Peut-on avoir $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} < 1$?

3) Passer au carré mais bien mettre une racine de part et d'autre de l'égalité avant de passer au carré.

6 ★★ Résoudre dans $\mathbb{R}$ en discutant selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$4\sqrt{x} = x + m$$

On pourra poser $X = \sqrt{x}$ et résoudre l'équation en X .

On obtient un trinôme du second degré en X . Le discriminant dépendra de m , et il faut alors naturellement disjointer les cas selon la valeur de m .

7 ★★★ Résoudre $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$

Multiplier tout par 3 et faire apparaître $(x+1)^3$

Identities algébriques

8 ★★ Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$.

- 1) Montrer que $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
- 2) En déduire que si $x \geq y$, on a $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$.
- 3) En déduire que :

$$\left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right| \leq \sqrt{|x-y|}$$

- 1) Passer au carré avec les justifications qui s'imposent.
- 2) S'inspirer de la preuve de la seconde inégalité triangulaire...

9 ★★★ Soit a, b, c trois nombres réels.

- 1) Démontrer que $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ et $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.
- 2) En déduire que $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$.

- 1) Mettre tout du même côté de l'inégalité, reconnaître une identité remarquable.
- 2) Utiliser la première formule démontrée en 1.

Partie entière

10 ★★ Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$ si et seulement si $x \in \mathbb{Z}$.

Utiliser le fait que $x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$, avec ε la partie décimale de x .

11 ★★ Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Utiliser le fait que $x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$, avec ε la partie décimale de x . Idem pour y , avec une partie fractionnaire différente ε' .

12 ★★ Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Utiliser le fait que $x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$, avec ε la partie décimale de x .

13 ★★★ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right)^2 \right\rfloor = 4n + 1$$

Développer l'expression au carré et simplifier l'égalité à montrer. Pour montrer que $\lfloor a \rfloor = b$, on peut montrer que $\lfloor a \rfloor \leq b$ et que $\lfloor a \rfloor \geq b$.

14 ★★★ Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$.

On pourra poser $k = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon = x - k \in [0, 1[$ et résoudre une équation avec deux inconnues : k et ε .